BAB 1 Aljabar

Algebra

Operasi Aljabar
algebraic operation

Fungsi
function

Persamaan Linear
linear equation

Sistem Persamaan Linear
system of linear equation

Pertidaksamaan Linear
linear inequality

Barisan dan Deret
squence and series

Statistika
statistics

OPERASI ALJABAR
(ALGEBRAIC OPERATION)

A. SUKU TUNGGAL DAN SUKU BANYAK

i. Bentuk aljabar $3a$, $-3ab^2$ disebut suku tunggal (*monomial*)

ii. Bentuk aljabar $-2x + 3y$ disebut suku dua (*binomial*)

iii. Bentuk aljabar $mn - pq + 7$, dan $x^2 - xy + y^2$ disebut suku tiga (*trinomial*)

iv. Bentuk aljabar dengan lebih dari 3 suku disebut suku banyak (*polinomial*)

Contoh:

$2a - 3b + 4c - 5$, $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, dan $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4xy + x + y + 2$.

Perhatikan bentuk $-2x^2y + 5$, -2 dan 5 disebut koefisien (tetapi secara umum "5" dianggap bilangan konstan sehingga disebut konstanta), x dan y disebut variabel atau peubah, dan angka 2 pada x^2 disebut pangkat atau derajat. Pada bentuk $-2x^2y$; -2, x, x^2, dan y disebut faktor dari $-2x^2y$.

B. SIFAT-SIFAT OPERASI ALJABAR

Jika m, n, dan p adalah bilangan bulat, maka:

1. $m + n = n + m$. (sifat komutatif pada penjumlahan)
2. $(m + n) + p = m + (n + p)$. (sifat asosiatif pada penjumlahan)
3. $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (sifat distributif)
4. $m \cdot n = n \cdot m$. (sifat komutatif pada perkalian)
5. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$. (sifat asosiatif pada perkalian)
6. $m + 0 = m$ (elemen identitas pada penjumlahan)
7. $m \cdot 1 = m$ (elemen identitas pada perkalian)
8. $m + (-m) = 0$ (invers penjumlahan)
9. $m \cdot \frac{1}{m} = 1 = 1$ (invers perkalian)
10. Jika $m \cdot n = m \cdot p$ dan $m \neq 0$, maka $n = p$ (*cancellation*)

C. PEMANGKATAN BENTUK ALJABAR

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $(a + b)^4 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^3$
- $(a - b)^4 = (a - b)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = x^4 - 4x^3 + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^3$
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

D. BENTUK FAKTORISASI KHUSUS

1. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar kuadrat.
   - $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
   - $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
   - $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
2. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar kubik.
   - $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$
   - $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$
   - $x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - xy(x + y) = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$
   - $x^3 - y^3 = (x^2 + y^2)(x - y) - xy(x - y) = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$
3. Jumlah dan selisih dari dua bentuk aljabar berpangkat n.
   - $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ → $n \in$ ganjil
   - $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ → $n \in \mathbb{N}$

Contoh soal:

Salah satu faktor dari $15^3 - 5^3$ adalah …

Jawab:

$15^3 - 5^3 \quad \rightarrow \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$15^3 - 5^3 = (15 - 5)(15^2 + 15 \times 5 + 5^2)$

$= 10\ (225 + 75 + 25)$

$= 10\ (325)$

Jadi, salah satu faktor dari $15^3 - 5^3$ adalah 325.

E. PEMFAKTORAN BENTUK ALJABAR

Berikut adalah rumus-rumus perkalian istimewa.

$a(c \pm d) = ac \pm cd$

$(a \pm b)(a + b) = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Contoh soal:

(*OSK SMP/MTs 2004*) Tentukan nilai dari $\sqrt{5050^2 - 4950^2}$.

Jawab:

$\sqrt{5050^2 - 4950^2} = \sqrt{(5050 + 4950)(5050 - 4950)}$

$= \sqrt{10.000 \times 100}$

$= 1.000$

Jadi, $\sqrt{5050^2 - 4950^2} = 1.000$.

1. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$

$$ax^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

$$ax^2 + bx + c = x^2 + (p + q)x + p \cdot q$$

Dengan demikian, diperoleh hubungan sebagai berikut

$$b = (p + q) \text{ dan } c = pq$$

Contoh soal:

Faktorkanlah: $x^2 + 3x - 4$.

Jawab:

Dengan cara langsung

$x^2 + 3x - 4$ dengan $b = 3$ dan $c = -4$.

Diperoleh:

$p + q = 3$ dan $pq = -4$ → $p = 4$ dan $q = -1$

Hal ini berarti:

$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$

2. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$

Anggap, $$ax^2 + bx + c = \frac{(ax + P)(ax + Q)}{a}$$

$$a(ax^2 + bx + c) = (ax + P)(ax + Q)$$

$$a^2x^2 + abx + ac = a^2x + a(ax + P)x + PQ$$

Dari hubungan di atas, diperoleh:

$$b = (P + Q) \text{ dan } ac = PQ$$

Contoh soal:

1. Faktorkanlah: $3x^2 - 4x - 4$

   Jawab:

   Cara ini merupakan pengembangan dari cara langsung, yaitu sebagai berikut.

   Nilai $P = -6$ dan $Q = 2$ yang habis dibagi $a = 3$ adalah $P = -6$. Hali ini berarti:

   $$3x^2 - 4x - 4 = \left(3x + \frac{2}{1}\right)\left(x - \frac{6}{3}\right)$$

   Jadi, $3x^2 - 4x - 4 = (3x + 2)(x - 2)$ atau $3x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(3x + 2)$.

2. Hasil penarikan akar di bawah:

   $$\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \cdots}}}$$

   Sama dengan ...

   Jawab:

   Misal: $\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \cdots}}} = a$

   $$a = \sqrt{1 + \frac{15}{4}a} \qquad \text{kedua ruas dikuadratkan}$$

   $$a^2 = 1 + \frac{15}{4}a$$

   $$4a^2 - 15a - 4 = 0$$

   $$(4a + 1)(a - 4) = 0$$

   $$a = -\frac{1}{4} \text{ atau } a = 4$$

   Jadi, $\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \frac{15}{4}\sqrt{1 + \cdots}}} = 4$.

F. OPERASI HITUNG PADA PECAHAN KOMPLEKS

A. Pecahan kompleks biasa

Contoh soal:

Sederhanakan $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}$

$$\frac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}} = \frac{\dfrac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}}$$

$$= \frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)} \cdot \frac{(x+3)(x+4)}{x+4-x-3}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)} \cdot \frac{(x+3)(x+4)}{1}$$

$$= \frac{x+4}{x+2}$$

Jadi, bentuk sederhana dari $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}$ adalah $\dfrac{x+4}{x+2}$

B. Pecahan bertumpuk

Contoh soal:

Tuliskkan pecahan bertumpuk $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{(x+1)-\dfrac{1}{x+2}}}$ sebagai pecahan aljabar biasa.

Jawab:

Bentuk pecahan aljabar ini bertumpuk di bawah, berarti kita mengerjakannya dari bawah ke atas, yaitu sebagai berikut:

$$\frac{1}{x-\dfrac{1}{(x+1)-\dfrac{1}{x+2}}} = \frac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{(x+1)(x+2)-1}{(x+2)}}}$$

$$= \frac{1}{x-\dfrac{x+2}{x^2+3x+2-1}}$$

$$= \frac{1}{x-\dfrac{x+2}{x^2+3x+1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{x(x^2+3x+1)-(x+2)}{(x^2+3x+1)}}$$

$$= \frac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2+x-x-2}$$

$$= \frac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2-2}$$

Jadi, bentuk sederhana dari $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{(x+1)-\dfrac{1}{x+2}}}$ adalah $\dfrac{x^2+3x+1}{x^3+3x^2-2}$

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Tentukan nilai r pada persamaan bentuk aljabar $(2x + 3y)(px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$.

   Jawab:

   $(2x + 3y)(px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $2x \times (px + qy) + 3y \times (px + qy) = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $2px^2 + 2qxy + 3pxy + 3qy^2 = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   $(2p)x^2 + (2q + 3p)xy + (3q)y^2 = rx^2 + 23xy + 12y^2$

   Dengan melihat kesesuaian letak ditemukan $2p = r$, $2q + 3p = 23$, $3q = 12$

   untuk $q = 4$ diperoleh $3 \cdot 4 = 12$ (benar)

   Substitusikan $q = 4$ ke $2q + 3p = 23$.

   $2q + 3p = 23 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 4 + 3p = 23$

   $3p = 23 - 8 \quad \rightarrow \quad p = \dfrac{15}{3} = 5$

   Dengan demikian:

   $r = 2p \quad \rightarrow \quad r = 2 \cdot 5 = 10$

   Jadi, nilai r adalah 10.

2. Ketika tuan Felix dihadapkan dengan soal berbentuk:

   $\sqrt{2.374 \times 2.375 \times 2.376 \times 2.377 + 1}$

   Dia tidak mengalikan satu persatu bilangan-bilangan yang ada, yang dia lakukan adalah menjumlahkan 2.374 dengan kuadrat dari 2.375. Benarkah jawabannya? Bisakah jawabannya dipertanggungjawabkan untuk setiap bentuk dengan pola seperti itu?

   Jawab:

   Misal $2.374 = x$, sehingga bentuk akar kuadrat di atas dapat ditulis menjadi:

Dalam bentuk aljabar:

$$\sqrt{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1} = \sqrt{(x^2+x)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x^3+3x^2+2x)\cdot(x+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x^4+6x^3+11x^2+6x)+1}$$

$$= \sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}$$

$$= \sqrt{(x^2+3x+1)\cdot(x^2+3x+1)}$$

$$= \sqrt{(x^2+3x+1)^2}$$

$$= x^2 + 3x + 1$$

$$= x^2 + 2x + x + 1$$

$$= x + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x + (x + 1)^2$$

Jadi, $\sqrt{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1} = x + (x+1)^2$

3. Pak Idris mempunyai kebun apel berbentuk persegi dan Pak Halim mempunyai kebun semangka berbentuk persegipanjang. Ukuran panjang kebun semangka Pak Halim 10 m lebihnya dari panjang sisi kebun apel Pak Idris. Sedangkan lebarnya, 3 lebihnya dari panjang sisi kebun apel Pak Idris. Jika diketahui luas kebun Pak Halim adalah 450 m^2. Tentukan luas kebun apel Pak Idris? (soal cerita atau *word problem*)

   Jawab:

   Ukuran panjang dan lebar kebun Pak Halim dapat ditulis sebagai panjang = $x + 10$ dan lebar = $x + 3$.

   Sehingga:

   Luas kebun Pak Halim = Panjang × Lebar

   Panjang × Lebar = Luas kebun Pak Halim

$(x + 10) \times (x + 3) = 450$

$x(x + 3) + 10(x + 3) = 450$

$x^2 + 3x + 10x + 30 = 450$

$x^2 + 13x + 30 = 450$

$x^2 + 13x + 30 - 450 = 0$

$x^2 + 13x - 420 = 0$

Dengan cara pemfaktoran:

$x^2 + 13x - 420 = 0$

$(x + 28)(x - 15) = 0$

$x + 28 = 0$ atau $x - 15 = 0$

$x = -28$ atau $x = 15$

Dapat dilihat bahwa nilai x yang memenuhi adalah 15

Dengan demikian, luas kebun Pak Idris adalah 225 m^2

4. Seorang anak merahasiakan tiga bilangan. Dia hanya memberi tahu jumlah dari masing-masing dua bilangan tersebut secara berturut-turut adalah 28, 36, 44. Tentukan jumlah ketiga bilangan tersebut.

   Jawab:

   Misal tiga bilangan tersebut berturut-turut adalah a, b, dan c, maka:

   $a + b = 28$

   $b + c = 36$

   $a + c = 44$ +

   $2a + 2b + 2c = 108$

   $2(a + b + c) = 108$

   $a + b + c = \frac{108}{2} = 54$

   Jadi, jumlah ketiga bilangan tersebut adalah $a + b + c = 54$

5. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$.

   Nilai m^2+n^2 adalah …

   Jawab:

   $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7} \quad \rightarrow \quad m+n=4x$ dan $mn=7x$

   Artinya bahwa $m+n$ kelipatan 4 dan mn kelipatan 7, sehingga:

   $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{8}{14} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}+\frac{7}{14} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{14}+\frac{1}{2}$

   $m^2+n^2=14^2+2^2=196+4=200$

   Jadi, nilai $m^2+n^2=200$

6. Diberikan dua buah bilangan:

   $x = 201520152015 \times 2016201620162016$

   $y = 201620162016 \times 2015201520152015$

   Hitunglah nilai dari $(x-y)^{2016}$.

   Jawab:

   $x = 201520152015 \times 2016201620162016$

   $= 2015(100010001) \times 2016(1000100010001)$

   $y = 201620162016 \times 2015201520152015$

   $= 2016(100010001) \times 2015(1000100010001)$

   Oleh karena $x = y$, maka diperoleh $(x-y)^{2016}=(y-y)^{2016}=0^{2016}=0$

   Jadi, nilai dari $(x-y)^{2016}=0$.

7. Diketahui $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{20152016}{20132014}$.

   dengan a, b, c, d, e bilangan bulat positif, maka tentukanlah $a+b+c+d+e$.

Jawab:

Perhatikan bahwa $\frac{20152016}{20132014}=\frac{10076008}{10066007}=1+\frac{10001}{10066007}$. Maka $a=1$.

Setiap bagian pecahan dibalik $b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}$, sehingga:

$\frac{10066007}{10001}=1006+\frac{5001}{10001}$. Maka $b=1006$.

Dengan cara yang sama, $\frac{10001}{5001}=1+\frac{5000}{5001}$. Maka $c=1$.

Lakukan seperti cara di atas, $\frac{5001}{5000}=1+\frac{1}{5000}$. Maka $d=1$, $e=5000$.

Jadi, $a+b+c+d+e=1+1006+1+1+5000=6009$.

8. Hitunglah: $1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{\dots}}}}$

Jawab:

Misal $1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{\dots}}}}=x$

$x = 1+\frac{12}{x}$ kedua ruas dikali x

$x^2 = x+12$

$x^2-x-12=0$

$(x-4)(x+3)=0 \rightarrow x=4$ atau $x=-3$

Jadi, $1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{\cdots}}}}=4$.

9. (*OSP SMP/MTs 2011*) Saat ini umur Agus dan umur Fauzan kurang dari 100 tahun. Jika umur Agus dan umur Fauzan ditulis secara berurutan, maka diperoleh suatu bilangan empat digit (angka) yang merupakan kuadrat sempurna. Dua puluh tiga tahun kemudian, jika umur mereka ditulis dengan cara yang sama, maka diperoleh bilangan empat digit lain yang juga merupakan kuadrat sempurna. Jika umur mereka diasumsikan merupakan bilangan bulat positif, berapakah umur mereka saat ini?

Jawab:

Berdasarkan keterangan soal bahwa umur Agus dan umur Fauzan merupakan bilangan dua digit.

Misal: umur Agus = AB, umur Fauzan = CD dan umur sekarang = $ABCD = x^2$

$1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D = x^2$ *)

Umur pada 23 tahun kemudian:

$(A + 2)(B + 3)(C + 2)(D + 3) = y^2$

$(1000 \cdot A + 2000) + (100 \cdot B + 300) + (10 \cdot C + 20) + (D + 3) = y^2$

$1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2000 + 300 + 20 + 3 = y^2$

$1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2323 = y^2$ **)

Eliminasi (*) dengan (**):

$$
\begin{aligned}
1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D + 2323 &= y^2 \\
1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D &= x^2 \quad - \\
\hline
2323 &= y^2 - x^2 \\
101 \cdot 23 &= (y + x) \cdot (y - x)
\end{aligned}
$$

$$y + x = 101$$
$$\underline{y - x = 23} \; -$$
$$2x = 78 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{78}{2} = 39$$
$$ABCD = x^2 = 39^2 = 1521 \qquad \rightarrow \qquad AB = 15 \text{ dan } CD = 21$$

Jadi, umur Agus adalah 15 tahun dan umur Fauzan adalah 21 tahun.

10. Diberikan $a + b + c = 0$. Hitunglah nilai dari:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Jawab:

$$a + b + c = 0 \qquad \rightarrow \qquad c = -(a + b)$$

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$= \frac{1}{b^2 + (a+b)^2 - a^2} + \frac{1}{(a+b)^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2}$$

$$= \frac{1}{b^2 + a^2 + 2ab + b^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}$$

$$= \frac{1}{2b^2 + 2ab} + \frac{1}{2a^2 + 2ab} + \frac{1}{-2ab} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2b(a+b)} + \frac{1}{2b(a+b)} + \frac{1}{-2ab}$$

$$= \frac{1}{2b(a+b)}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2ab} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2b(a+b)}\left(\frac{a+b}{ab}\right) - \frac{1}{2ab}$$

$$= \frac{1}{2ab} - \frac{1}{2ab} = 0$$

Jadi, $\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0$.

UJI KESIAPAN 1.1

1. It is given that $m = 5 \times 10^{-3}$ and $n = 4.2 \times 10^{7}$. Evaluate $\frac{1}{n} : m$, giving your answer in standard form, correct to 1 significant figure.

2. Temukan hasil dari perkalian bentuk aljabar berikut:

$$(a-b)(a+b)\left(a^{2^1}+b^{2^1}\right)\left(a^{2^2}+b^{2^2}\right)\left(a^{2^3}+b^{2^3}\right)\cdots\left(a^{2^9}+b^{2^9}\right)$$

3. Selesaikanlah:

   a. $\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right):(a+b+c) = \ldots$

   b. $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2:\left(a^2+b^2\right) = \ldots$

4. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, berapa nilai dari $a^2(a + 4) + 2013$?

5. Tunjukkan bahwa: $(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\cdots\left(1+a^{1024}\right)=\frac{1-a^{2048}}{1-a}$.

6. Compute: $(199{,}919{,}981{,}997)^2 - 2 \cdot (199{,}919{,}981{,}994)^2 + (199{,}919{,}981{,}991)^2$.

7. Compute $\sqrt{1{,}998 \cdot 1{,}996 \cdot 1{,}994 \cdot 1{,}992 + 16}$ without a calculator.

8. Jika $x=\sqrt{\left(10^6\right)\left(10^6+1\right)\left(10^6+2\right)\left(10^6+3\right)+1}$, berapa jumlah semua angka pada bilangan x?

9. Tunjukkan bahwa $n^4 + 4$ adalah prima hanya jika $n = 1$, untuk $n \in \mathbb{N}$.

10. Tunjukkan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$.

FUNGSI

(FUNCTION)

A. PENGERTIAN FUNGSI (PEMETAAN)

Pemetaan adalah relasi (hubungan) yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain.

Notasi fungsi:

$f : A \to B$ (dibaca fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B)

Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*)

Himpunan B disebut **daerah kawan** (*kodomain*)

Pasangan anggota A di B disebut **daerah hasil** (*range*)

B. MENENTUKAN BANYAK PEMETAAN

Jika $A = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{4, 6, 8, 9, 10\}$. Tentukan banyaknya pemetaan yang mungkin.

Jawab:

$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad \to \quad n(A) = 4$

$B = \{4, 6, 8, 9, 10\} \quad \to \quad n(B) = 5$

Banyak pemetaan $f : A \to B$ ditentukan oleh rumus:

$$n(f : A \to B) = (n(B))^{n(A)}$$

Sehingga banyak pemetaan $f : A \to B$ adalah:

$n(f : A \to B) = (5)^4 = 625$ pemetaan.

Banyak pemetaan $f : B \to A$ ditentukan oleh rumus:

$$n(f : B \to A) = (n(A))^{n(B)}$$

Sehingga banyak pemetaan $f : B \to A$ adalah:

$n(f : B \to A) = (4)^5 = 256$ pemetaan.

Menentukan banyak korespondensi satu-satu

Jika $n(A) = n(B) = n$, banyak korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B ditentukan oleh:

$$n(f : A \xrightarrow{1-1} B) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

C. MENULIS FORMULA/RUMUS FUNGSI

Jika notasi $f : x \rightarrow y$ kita tuliskan dalam bentuk rumus fungsi maka diperoleh $y = f(x)$.

Contoh soal:

1. Jika $f(x) = x^2 - 4x$, tentukan $f(x - 3)$.

   Jawab:

   $f(x) = x^2 - 4x$

   $f(x-3) = (x-3)^2 - 4(x-3)$ (substitusikan $(x - 3)$ ke x)

   $f(x-3) = x^2 - 6x + 9 - 4x + 12$ (penjabaran)

   $f(x-3) = x^2 - 10x + 21$ (penyederhanaan)

2. Diberikan $r : 3t - 1 \rightarrow t$, tentukan $r(t)$.

   Jawab:

   $r : 3t - 1 \rightarrow t$, ditulis $r(3t - 1) = t$

   Misalkan $p = 3t - 1 \rightarrow 3t = p + 1 \rightarrow t = \frac{p+1}{3}$

   Substitusikan $t = \frac{p+1}{3}$ ke persamaan $r(3t - 1) = t$, diperoleh:

   $r(p) = \frac{p+1}{3}$ atau $r(t) = \frac{t+1}{3}$

   Jadi, formula fungsinya adalah $r(t) = \frac{t+1}{3}$

D. MENGHITUNG NILAI FUNGSI

Menghitung nilai fungsi berarti kita mensubstitusi nilai variabel bebas ke dalam rumus fungsi sehingga diperoleh nilai variabel bergantungnya.

Contoh soal:

Diberikan $T : 3t - 1 \rightarrow t$. Hitunglah:

a. Peta dari 2

b. Nilai fungsi T untuk $t = 5$

c. Nilai x, jika $T(x) = 0$ (juga disebut pembuat nol fungsi T)

Jawab:

$T(3t - 1) = t$, mula-mula kita harus mengubah $T(3t - 1)$ menjadi $T(p)$.

Misalnya, $3t - 1 = p \quad \rightarrow \quad 3t = p + 1$

$$t = \frac{p+1}{3}$$

Substitusikan $t = \frac{p+1}{3}$ ke persamaan $T(3t - 1) = t$, diperoleh:

$T(p) = \frac{p+1}{3}$ atau $T(t) = \frac{t+1}{3}$

Sekarang rumus pemetaan adalah $T(t) = \frac{t+1}{3}$

a. Peta dari 2 berarti $T(2) = \frac{2+1}{3} \quad \rightarrow \quad T(2) = 1$

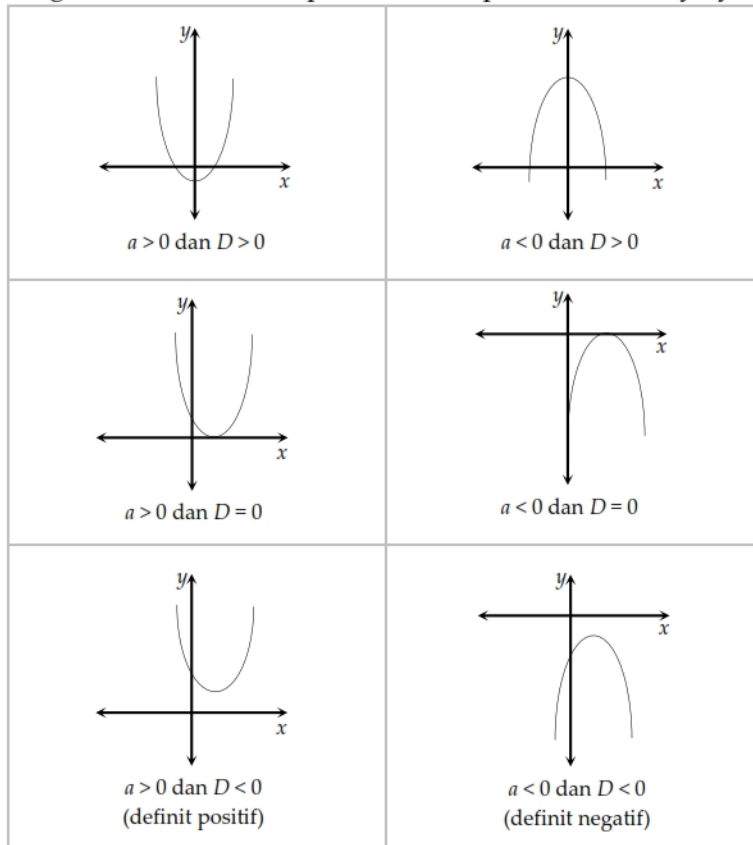
Jadi, peta dari 2 adalah 1.

b. Nilai fungsi T untuk $t = 5$ berarti $T(5) = \frac{5+1}{3} \quad \rightarrow \quad T(5) = 2$

c. $T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x+1}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

E. FUNGSI KUADRAT (PERSAMAAN PARABOLA)

Bentuk umum fungsi kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Grafik fungsi kuadrat disebut parabola, adapun sifat-sifatnya yaitu:

Titik ekstrim (nilai maksimum atau minimum)

$$x_e = -\frac{b}{2a} \text{ dan } y_e = -\frac{D}{4a} \qquad D = b^2 - 4ac$$

Dengan x_e : sumbu simetri

y_e : nilai ekstrim (nilai stasioner, nilai maksimum, nilai minimum)

Cara menggambar grafik (kurva) fungsi kuadrat:

⊕ Tentukan titik potong dengan sumbu $x = 0$ dan $y = 0$.
⊕ Tentukan titik potong terhadap sumbu $x = 0$ dan $y = 0$.
⊕ Tentukan koordinat titik puncaknya.
⊕ Tentukan $a > 0$ atau $a < 0$ (berdasarkan sifat-sifat grafik parabola)

F. MENENTUKAN FUNGSI KUADRAT

a. Parabola memotong sumbu x di titik $(x_1,0)$ (berarti bahwa $x_1 = x_2$) serta melalui titik tertentu, maka persamaan parabolanya ditentukan oleh:

$$f(x)=a(x-x_1)^2$$

b. Parabola memotong sumbu x di titik $(x_1,0)$ dan $(x_2,0)$ serta melalui titik tertentu, maka persamaan fungsi kuadratnya ditentukan oleh:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2) \text{ atau } f(x)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)$$

c. Parabola melalui tiga titik (x_1,y_1), (x_2,y_2), dan (x_3,y_3), maka fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

d. Parabola melalui titik puncak (x_e,y_e) dan melaui titik tertentu, maka persamaannya ditentukan oleh:

$$f(x)=a(x-x_e)^2+y_e$$

Berikut adalah cara untuk mendapatkan fungsi kuadrat:

- ⊕ Substitusikan ketiga titik ke fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka diperoleh tiga persamaan,
- ⊕ Eleminasi ketiga persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai a, b, dan c,
- ⊕ Substitusikan nilai a, b, dan c ke fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Contoh soal:

Persamaan dari kurva parabola yang mempunyai titik balik (1, –4) dan melalui titik (2, –3) adalah …

Jawab:

(x_e,y_e) = (7, 13), melalui (x, y) = (1, –4)

$-3 = a(2-1)^2 + (-4) \quad \rightarrow \quad -3 = a - 4 \quad \rightarrow \quad a = 1$

Maka, $f(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$.

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = ax + b$. jika bayangan dari –3 adalah –15 dan bayangan dari 3 adalah 9. Tentukan nilai dari $f(-2) + f(2)$.

Jawab:

Untuk $x = -3$

$f(-3) = -3a + b$

$-3a + b = -15 \quad \ldots (1)$

Untuk $x = 3$

$f(3) = 3a + b$

$3a + b = 9 \quad \ldots (2)$

Eleminasi (1) dan (2)

$$\begin{array}{r} -3a + b = -15 \\ 3a + b = 9 \quad + \\ \hline 2b = -6 \\ b = -3 \end{array}$$

Substitusikan $b = -3$ ke $3a + b = 9$.

$3a + b = 9$

$3a + (-3) = 9 \quad \rightarrow \quad 3a = 12 \quad \rightarrow \quad a = \frac{12}{3} = 4$

Dari hasil pengerjaan di atas diperoleh rumus fungsi yaitu $f(x) = 4x - 3$.

Untuk $x = -2 \quad \rightarrow \quad f(-2) = 4 \cdot (-2) - 3 = -11$

Untuk $x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = 4 \cdot (2) - 3 = 5$

$f(-2) + f(2) = -11 + 5 = -6$

Jadi, nilai dari $f(-2) + f(2) = -6$.

> ***Trik***
>
> Jika diketahui $f(x) = ax + b$, $f(m) = p$ dan $f(n) = q$ maka:
>
> $$a = \frac{p-q}{m-n}$$
>
> Jika diketahui $f(a) = s$ dan $f(b) = t$ maka:
>
> $$f(c) = s + (c-a) \cdot \frac{t-s}{b-a}$$

2. (*OSP SMP/MTs 2011*) Jika f adalah fungsi sehingga $f(xy) = f(x - y)$ dan $f(6) = 1$, maka $f(-2) - f(4) = \ldots$

Jawab:

Faktor positif dari 6 = {1, 2, 3, 6}

$$f(6 \cdot 1) = f(6-1) \quad \rightarrow \quad x = 6 \text{ dan } y = 1$$
$$f(6) = f(5)$$
$$1 = f(5) \quad \rightarrow \quad f(5) = 1$$
$$f(5 \cdot 1) = f(5-1) \quad \rightarrow \quad x = 5 \text{ dan } y = 1$$
$$f(5) = f(4)$$
$$1 = f(4) \quad \rightarrow \quad f(4) = 1$$
$$f(2 \cdot 3) = f(2-3) \quad \rightarrow \quad x = 2 \text{ dan } y = 3$$
$$f(6) = f(-1)$$
$$1 = f(-1) \quad \rightarrow \quad f(-1) = 1$$
$$f(-1 \cdot 1) = f(-1-1) \quad \rightarrow \quad x = -1 \text{ dan } y = 1$$
$$f(-1) = f(-2)$$
$$1 = f(-2) \quad \rightarrow \quad f(-2) = 1$$

Jadi, $f(-2) - f(4) = 1 - 1 = 0$.

3. (*OSP SMP/MTs 2008*) $f(x) = \frac{2x-4}{x}$, $x \neq 0$ dan $x \in \mathbb{R}$, maka $f^{2009}(6) = \ldots$

Catatan: Notasi $f^2(x) = f(f(x))$, notasi $f^3(x) = f(f(f(x)))$, dan seterusnya.

Jawab:

$$f(6) = \frac{2 \cdot 6 - 4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f^2(6) = f\left(f(6)\right) = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} - 4}{\frac{4}{3}} = -1$$

$$f^{3}(6)=f\left(f\left(f(6)\right)\right)=\frac{2\cdot(-1)-4}{(-1)}=6$$

$$f^{4}(6)=f\left(f^{3}(6)\right)=\frac{2\cdot 6-4}{6}=\frac{4}{3}$$

$$f^{5}(6)=f\left(f^{4}(6)\right)=\frac{2\cdot\frac{4}{3}-4}{\frac{4}{3}}=-1$$

$$f^{6}(6)=f\left(f^{5}(6)\right)=\frac{2\cdot(-1)-4}{(-1)}=6$$

$\vdots$

Berpola 3 (perulangan tiga periode) pada bilangan pangkatnya

Jadi, untuk menentukan nilai fungsi pada pola ke- 2009, kita dapat melakukan pembagian oleh 3 pada pangkatnya.

Perhatikan tabel berikut

Pola ke-	$f(x)=\frac{2x-4}{x}$	Sisa bagi oleh 3	Hasil
1	$f(6)$	1	$\frac{4}{3}$
2	$f^{2}(6)$	2	–1
3	$f^{3}(6)$	0	6
4	$f^{4}(6)=f^{1\cdot 3+1}(6)$	1	$\frac{4}{3}$
5	$f^{5}(6)=f^{1\cdot 3+2}(6)$	2	–1
6	$f^{6}(6)=f^{2\cdot 3+0}(6)$	0	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2009	$f^{2009}(6)=f^{669\cdot 3+2}(6)$	2	–1

Jadi, nilai $f^{2009}(6)=-1$.

4. (*CMO 1995*) Diberikan $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Hitung penjumlahan:

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\ldots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

Jawab:

Ingat bahwa

$$f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9}{9+3\times 9^x}=\frac{3}{9^x+3}$$

Dari sini kita peroleh

$$f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{9^x+3}=1$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1995} f\left(\frac{k}{1996}\right) &= \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right)+f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{998}{1996}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right)+f\left(1-\frac{k}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 997+\frac{3}{3+3}\\ &= 997\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi, $f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\ldots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)=997\frac{1}{2}$

5. (*SMO 2006*) Diberikan fungsi $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, di mana $\mathbb{N}$ sebagai himpunan bilangan asli, dan $\mathbb{Q}$ sebagai himpunan bilangan rasional. Jika $f(1)=\dfrac{3}{2}$, dan

$$f(x+y)=\left(1+\frac{y}{x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{x}{y+1}\right)f(y)+x^2y+xy+xy^2$$

Untuk semua bilangan asli x, y. Temukan nilai dari $f(20)$.

Jawab:

Misalkan $y = 1$, diperoleh

$$f(x+1) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{3}{2} + x^2 + 2x$$

Maka

$$\frac{f(x+1)}{x+2} - \frac{f(x)}{x+1} = x + \frac{3}{4}$$

Diperoleh

$$\frac{f(n)}{n+1} - \frac{f(n-1)}{n} = n - 1 + \frac{3}{4},$$

$$\frac{f(n-1)}{n} - \frac{f(n-2)}{n-1} = n - 2 + \frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{f(2)}{3} - \frac{f(1)}{2} = 1 + \frac{3}{4}$$

Jumlahkan persamaan berikut, diperoleh

$$\frac{f(n)}{n+1} - \frac{f(1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{3}{4}(n-1)$$

Sehingga,

$$f(n) = (n+1)\left[\frac{(n-1)n}{2} + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$

Dengan demikian,

$$f(20) = \frac{(20)(21)(41)}{4} = 4305.$$

UJI KESIAPAN 1.2

1. Fauzi bersepeda pada hari Kamis, Jum'at dan Sabtu. Pada hari-hari lain, Fauzi selalu jogging. Di lain pihak, Faisal selalu bersepeda pada hari Sabtu, Senin dan Selasa, tetapi selalu jogging pada hari-hari lain. Pada suatu hari, keduanya berkata: "Kemarin saya bersepeda". Hari apa mereka mengucapkan perkataan tersebut?

2. Dinda selalu masuk les pada hari Senin, Selasa, Rabu, dan libur les pada hari-hari lainnya, sedangkan Novi selalu les pada hari Kamis, Jum'at dan Sabtu, dan libur pada hari-hari lainnya. Pada suatu hari terjadi percakapan berikut:

   Dodi: "kemarin saya les"

   Kamal: "Saya hari ini"

   Pada hari apa percakapan tersebut terjadi?

3. Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y=\dfrac{x+2}{2x-6}$, $x \neq 3$. Tentukan rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

4. Jika $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x \neq 1$. Tentukanlah $f(-x)$.

5. Diketahui $f(2x-3) = 4x-7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah …

6. Bila $f\left(x\right)=\dfrac{x}{a}\left[1-\dfrac{b^2}{x^2}\right]+\dfrac{x}{b}\left[1-\dfrac{a^2}{x^2}\right]$, maka $f(a+b)$ adalah …

7. Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya s dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah $10 m/s^2$).

PERSAMAAN LINEAR
(*LINEAR EQUATION*)

A. PENGERTIAN PERSAMAAN

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan berbentuk $ax + b = 0$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, dan

x : variabel real

a : koefisien x

b : konstanta

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan berbentuk $ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$, dan a dan b tidak keduanya nol, dimana

x : variabel real

a : koefisien x

b : konstanta

> Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a, b keduanya tidak nol. Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

Sifat-sifat:

Misal l adalah persamaan linear, maka:

⊕ Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

⊕ Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

B. SELESAIAN PLDV

Penentuan solusi (penyelesaian) PLDV dapat dilakukan dengan menerka atau dengan melakukan operasi aljabar. Solusi PLDV dalam himpunan bilangan bulat dikenal sebagai persamaan *Diophantine*.

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Selesaikanlah persamaan $1-\dfrac{x-\dfrac{1+3x}{5}}{3}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-\dfrac{10-6x}{7}}{2}$.

   Jawab:

   Diketahui persamaan tersebut terdiri dari pecahan bertumpuk pada kedua ruasnya, sederhanakan dahulu masing-masing persamaan pada kedua ruas

   $1-\dfrac{x-\dfrac{1+3x}{5}}{3}=1-\dfrac{5x-(1+3x)}{15}=\dfrac{15-2x+1}{15}=\dfrac{16-2x}{15}$, dan

   $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-\dfrac{10-6x}{7}}{2}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{14x-(10-6x)}{14}=\dfrac{10-13x}{14}$. Maka,

$$\frac{16-2x}{15}=\frac{10-13x}{14}$$

$$14(16-2x)=15(10-13x)$$

$$224-28x=150-195x$$

$$x=-\frac{74}{167}$$

   Jadi, $x=-\dfrac{74}{167}$.

2. Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia menghabiskan uangnya Rp 4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dibelanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanja hari Senin. Sekarang dia masing memiliki uang sisa belanja sebanyak Rp 1.000,00. Tentukan uang Andi sebelum dibelanjakan.

Jawab:

Diketahui:

Misal banyak uang Andi sebelum dibelanjakan = x rupiah, sehingga:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4000\right)$.

Untuk menyelesaiakan kasus ini, maka buat persamaan linearnya.

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000$$

$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$

$x = 26.000$

Dengan demikian, uang Andi mula-mula adalah Rp 26.000,00

3. Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenenk tersebut diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tahun lahir mereka. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi. Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Jawab:

Misal: umur kakek = K tahun dan umur nenek = N tahun,

tahun lahir kakek = TK dan tahun lahir nenek = TN

$K - N = 3$

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:

$N = (20 - 11) + (2013 - 1945)$ atau $N = 77$ sehingga dengan $K - N = 3$ diperoleh $K = 80$

Selanjutnya kita mendapatkan dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

Sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:

$TN + 77 = 2013$ dan $TK + 80 = 2013$

Bila persamaan (2) diselesaiakan maka $TN = 1936$ dan $TK = 1933$

Dengan demikian, tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

4. Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang, (c adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun lalu. Tentukan nilai c.

   Jawab:

   Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.

   Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan:

   $$x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \rightarrow \quad x = 2c + 12$$

   $$x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27 \quad \rightarrow \quad 4x - 128 = 0$$

   $$\rightarrow \quad x = 32$$

   Substitusikan $x = 32$ ke $x = 2c + 12$ diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$

   Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

5. Agung mempunyai satu bundel tiket piala Dunia untuk dijual. Pada hari pertama terjual 10 lembar tiket, hari kedua terjual setengah dari tiket yang tersisa dan pada hari ketiga terjual 5 lembar tiket. Bila tersisa 2 lembar tiket, maka banyak tiket dalam satu bundel adalah …

Jawab:

Misal banyak tiket dalam satu bundel = a, maka:

$a-10-\left(\frac{a-10}{2}\right)-5=2 \quad \rightarrow \quad$ kedua ruas dikali 2

$2a-20-(a-10)-10=4$

$2a-a-20+10-10=4$

$a=24$

Jadi, banyak tiket dalam satu bundel adalah 24 tiket.

6. Tentukan nilai x yang memenuhi dari persamaan berikut:

   a. $3^{5x-2}=9^{x+2}$

   b. $2^{2x+3}=\left(\frac{1}{16}\right)^{x+1}$

   c. $\sqrt{32^{2x-3}}=\sqrt[4]{128^{x+1}}$

Jawab:

a. $3^{5x-2}=9^{x+2}$

$3^{5x-2}=\left(3^2\right)^{x+2}$

$5x-2=2x+4$

$3x=6$

$x=2$

b. $2^{2x+3}=\left(\frac{1}{16}\right)^{x+1}$

$2^{2x+3}=\left(\frac{1}{2^4}\right)^{x+1}$

$2^{2x+3}=\left(2^{-4}\right)^{x+1}$

$2x+3=-4x-4$

$6x=-7$

$x=-\frac{7}{6}$

c. $\sqrt{32^{2x-3}}=\sqrt[4]{128^{x+1}}$

$\sqrt{\left(2^5\right)^{2x-3}}=\sqrt[4]{\left(2^7\right)^{x+1}}$

$\sqrt{2^{10x-15}}=\sqrt[4]{2^{7x+7}}$

$2^{\frac{10x-15}{2}}=2^{\frac{7x+7}{4}}$

$\frac{10x-15}{2}=\frac{7x+7}{4}$

$20x-30=7x+7$

$13x=37$

$x=\frac{37}{13}$

7. Hari ini usiaku $\frac{1}{3}$ kali usia ayahku, lima tahun yang lalu usiaku $\frac{1}{4}$ kali usia ayahku. Lima tahun mendatang usiaku adalah … tahun.

   Jawab:

   Misal usiaku = A dan usia ayah = B, maka:

   $A = \frac{1}{3}B \quad \rightarrow \quad 3A = B$

   $A - 5 = \frac{1}{4}(B - 5) \quad \rightarrow \quad 4A - 20 = B - 4 \quad \rightarrow \quad B = 4A - 15$

   $4A - 15 = 3A$

   $A = 15$

   Jadi, usiaku pada lima tahun mendatang adalah $15 + 5 = 20$ tahun.

8. Temukan nilai k sehingga memenuhi persamaan $11x - 2 = kx + 15$ dengan penyelesaian bilangan bulat positif x, dan tentukan penyelesaian

   $$(11 - k)x = 17$$

   Jawab:

   Persamaan itu memiliki sedikitnya satu solusi x positif, maka $k \neq 11$, and $x = \frac{17}{11 - k}$. Karena pecahan tersebut merupakan bilangan bulat, $(11 - k) \mid 17$, maka $k = -6$ ataur 10 berdasarkan hubungannya didapat, $x = 1$ or $x = 17$.

9. Diketahui persamaan $2a(x + 6) = 4x + 1$ tidak memiliki penyelesaian, jika a suatu ukurang panjang, tentukan nilai a.

   Jawab:

   Berdasarkan persamaan tersebut $2a(x + 6) = 4x + 1$ diperoleh $(2a - 4)x = 1 - 12a$. Karena persamaan tersebut tidak mempunyai solusi, maka

   $$2a - 4 = 0 \quad \text{dan} \quad 1 - 12a \neq 0,$$

   Dengan demikian, $a = 2$.

UJI KESIAPAN 1.3

1. Cari semua bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi persamaan:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$$

2. Temukan nilai x yang memenuhi persamaan:

$$\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x-4}+\frac{6x+24}{16-x^2}$$

3. Find a value of t so that $2x + 4 = t$ and $8x – 1 = 7$ are equivalent.

4. Temukan solusi bulat positif (x, y) dari PLDV $7y = 100 – 5x$.

5. Carilah nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

a. $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{4}{7}$$

b. $$x=\frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{\cdots}-1}-1}-1}$$

6. Dalam sebuah kelas, $\frac{3}{5}$ bagian siswanya adalah wanita. Ke dalam kelas tersebut ditambahkan 5 siswa pria dan 5 siswa wanita. Sekarang, $\frac{3}{7}$ bagian siswanya adalah pria. Berapa banyak siswa dalam kelas mula-mula.

7. Sebuah semangka yang beratnya 1 kg mengandung 93% air. Sesudah beberapa lama dibiarkan di bawah sinar matahari, kandungan air semangka itu turun menjadi 63%. Berapakah berat semangka itu sekarang?

SISTEM PERSAMAAN LINEAR
(*SYSTEM of LINEAR EQUATION*)

A. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPLDV)

Bentuk umum SPLDV dapat diekpresikan dalam bentuk:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Metode Substitusi (Metode Pengganti)

Solusi (penyelesaian) dari Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dengan metode substitusi (mengganti), berarti kita menggunakan PLDV dalam bentuk eksplisit: $y = mx + n$ atau $x = my + n$, disubstitusi ke bentuk implisit $ax + by + c = 0$ agar diperoleh persamaan linear satu variabel (PLSV).

Contoh soal:

Jumlah dua bilangan adalah 41, sedang selisih kedua bilangan itu adalah 19. Berapa masing-masing bilangan itu?

Jawab:

$a + b = 41$

$a - b = 19 \quad \rightarrow \quad a = b + 19$

substitusikan $a = b + 19$ ke $a + b = 41$:

$a + b = 41$

$(b + 19) + b = 41$

$2b + 19 = 41$

$2b = 22 \quad \rightarrow \quad b = 11$

substitusikan $b = 11$ ke $a + b = 41$:

$a + 11 = 41$

$a = 41 - 11 = 30$

Jadi, kedua bilangan itu adalah 30 dan 11.

Metode Eliminasi (Metode Penghapus)

Metode eliminasi digunakan untuk menentukan solusi (x, y) pada SPLDV, jika PLDV keduanya dalam bentuk eksplisit ataupun keduanya dalam bentuk implisit. Di sini kita tinggal menetapkan variabel mana yang akan dieliminasi (dihapus) dahulu.

Contoh soal:

Tiga *T-shirt* dan empat topi dijual seharga Rp 960.000,00. Dua T-shirt dan lima topi dijual Rp 990.000,00. Berapakah harga setiap *T-shirt*? Berapakah harga setiap topi?

Jawab:

Misal: *T-shirt* = x; Topi = y

Sehingga:

$3x + 4y = 960.000$

$2x + 5y = 990.000$

Eleminasi (2) dan (1):

$$\begin{array}{l|l|l} 2x + 5y = 990.000 & \times 3 & 6x + 15y = 2.970.000 \\ 3x + 4y = 960.000 & \times 2 & \underline{6x + 8y = 1.920.000} \; - \end{array}$$

$$7y = 1.050.000 \quad \rightarrow \quad y = 150.000$$

substitusikan $y = 150.000$ ke $3x + 4y = 960.000$:

$$3x + 4y = 960.000 \quad \rightarrow \quad 3x = 960.000 - 4y$$

$$3x = 960.000 - 4 \cdot 150.000$$

$$3x = 960.000 - 600.000$$

$$x = \frac{360.000}{3} = 120.000$$

Jadi, harga sebuah *T-shirt* adalah Rp 120.000,00 dan sebuah topi adalah Rp 150.000,00.

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Jika diketahui sistem persamaan linear dua variabel $1234567x + 7654321y = 3456789$ dan $7654321x + 1234567y = 9876543$. Bagaimana cara menentukan nilai $x^2 - y^2$?

Jawab:

$$1234567x + 7654321y = 3456789$$

$$\underline{7654321x + 1234567y = 9876543} \; +$$

$$(1234567 + 7654321)x + (1234567 + 7654321)y = 3456789 + 9876543$$

$$(7654321 + 1234567) \cdot (x + y) = 3456789 + 9876543$$

$$x + y = \frac{3456789 + 9876543}{1234567 + 7654321} = \frac{13333332}{8888888} = \frac{3 \cdot 4444444}{2 \cdot 4444444} = \frac{3}{2}$$

$$1234567x + 7654321y = 3456789$$

$$\underline{7654321x + 1234567y = 9876543} \; -$$

$$(1234567 - 7654321)x + (7654321 - 1234567)y = 3456789 + 9876543$$

$$(1234567 - 7654321) \cdot (x - y) = 3456789 - 9876543$$

$$x - y = \frac{3456789 - 9876543}{1234567 - 7654321} = \frac{6419754}{6419754} = 1$$

Sehingga:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = \frac{3}{2} \times 1$$

Jadi, $x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2}$

2. (*OSK SMP/MTs 2013*) Suatu hari perbandingan jumlah uang Netty dan Agit adalah 2 : 1. Sehari kemudian Netty memberikan uangnya sejumlah Rp 100.000,00 kepada Agit. Sekarang perbandingan uang Netty dan Agit adalah 1 : 3. Jumlah uang Netty sekarang adalah Rp …

Jawab:

Misal:

Uang Netty mula-mula = N

Uang Agit mula-mula = A

$$\frac{N}{A}=\frac{2}{1} \quad \rightarrow \quad N=2A \quad \rightarrow \quad A=\frac{N}{2}$$

$$\frac{(N-100000)}{(A+100000)}=\frac{1}{3}$$

$3(N - 100000) = 1(A + 100000)$

$3N - 300000 = A + 100000$

$3N - A = 100000 + 300000 = 400000$

Substitusikan $A = \dfrac{N}{2}$ ke persamaan $3N - A = 400000$:

$3N - A = 400000$

$$3N-\frac{N}{2}=400000 \quad \rightarrow \quad \frac{6N}{2}-\frac{N}{2}=400000$$

$$\frac{5N}{2}=400000 \quad \rightarrow \quad 5N=800000$$

$N = 160000$

Jadi, uang Netty sekarang adalah Rp 160.000,- – Rp 100.000,- = Rp 60.000,-.

3. Selesaikan sistem persamaan dari

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{5}-\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{1}{2}, \\ 2(x-y)-3(x+y)+1=0. \end{cases}$$

Jawab:

Dengan menyederhanakan persamaan (1), kita peroleh

$$4(x - y) - 5(x + y) = 10$$

$$x + 9y = -10 \quad *)$$

Dengan menyederhanakan persamaan (2), kita peroleh

$$x + 5y = 1 \quad **)$$

Eleminasi (*) dan (**)

$4y = -11$, sehingga $y = -\dfrac{11}{4}$

Dari (**), $x = 1 - 5y = 1 + \dfrac{55}{4} = \dfrac{59}{4}$. Sehingga, $x = \dfrac{59}{4}$, $y = -\dfrac{11}{4}$

Alternatif penyelesaian:

Dari persamaan pertama, kita peroleh

$$x = -10 - 9y \qquad ***)$$

Substitusikan (***) ke persamaan (**), diperoleh

$$2(-10 - 9y - y) - 3(-10 - 9y + y) + 1 = 0$$

$4y = -11$, sehingga $y = -\dfrac{11}{4}$

Dengan substitusi lagi (***), kita dapatkan $x = -10 + \dfrac{99}{4} = \dfrac{59}{4}$. Sehingga,

$$x = \frac{59}{4}, y = -\frac{11}{4}$$

4. Selesaikan sistem persamaan untuk (x, y), dan temukan nilai k.

$$x + (1 + k)y = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$(1 - k)x + ky = 1 + k \qquad \text{... (2)}$$

$$(1 + k)x + (12 - k)y = -(1 + k) \qquad \text{... (3)}$$

Jawab:

Untuk menghilangkan k dari persamaan, (2) + (3), kita peroleh

$$2x + 12y = 0$$

$$x = -6y \quad \text{... (4)}$$

Substitusikan (4) ke (1), kita peroleh

$$(k - 5)y = 0$$

Jika $k \neq 5$, maka $y = 0$ dan $x = 0$. Dari (2) kita peroleh

$$k = -1$$

Jika $k = 5$, (2) mengakibatkan $(1 - 4)(-6y) + 5y = 6$.

Jadi, $y = \frac{6}{29}$, $x = -\frac{36}{29}$.

5. Diberikan d, e, f bilangan bulat sedemikian sehingga $d(10e + f)(10f + e) = 2015$. Hitunglah def.

   Jawab:

   Karena $d(10e + f)(10f + e) = 2015$, maka d, $(10e + f)$ dan $(10f + e)$ adalah faktor dari 2015.

   $2015 = 5 \times 13 \times 31$

   $d = 5$

   $10e + f = 13$

   $10f + e = 31$

   Dari $10e + f = 13$ dan $10f + e = 31$ didapat $e = 1$ dan $f = 3$.

   Jadi, $def = 51331$.

UJI KESIAPAN 1.4

1. Nilai k yang membuat SPLDV $x + 2y = 3$ dan $5x + ky = -7$ berada dalam keadaan tak konsisten adalah …

2. Penyelesaian dari SPLDV

$$\frac{3x-y+1}{3}=\frac{2x+y+2}{5}=\frac{3x+2y+1}{6}$$

   adalah …

3. Find two numbers whose sum is 32 an whose difference is 14.

4. Find the equation of the form $ax + by = 10$ that passes through the point (1, 6) and (2, 4).

5. Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede mereka dapa menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan dengan batas waktu yang diberikan?

6. Sebuah bilangan terdiri dari 2 angka ditambah 45 diperoleh bilangan yang terdiri dari 2 angka yang sama tapi dalam urutan terbalik. Jika di antara angka puluhan dan satuan diselipkan angka 0, maka bilangan itu menjadi $7\frac{2}{3}$ kali bilangan semula. Tentukan bilangan tersebut!

7. Hitung nilai $(x + y)$ yang memenuhi SPLDV

   $1.001x - 150y = 388$

   $1.002x + 2.153y = 112$

PERTIDAKSAMAAN LINEAR

(*LINEAR INEQUALITY*)

A. PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Pertidaksamaan adalah dua bentuk aljabar yang di antaranya ditempatkan tanda ">", "≥", "<", atau pun "≤", menyatakan hubungan ketidaksamaan antara dua ekspresi.

B. SIFAT-SIFAT DALAM PERTIDAKSAMAAN

1. Penjumlahan/Pengurangan

Jika a, b, dan $c \in \mathbb{R}$, selalu berlaku:

⊕ Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$,

⊕ Jika $a > b$, maka $a - c > b - c$,

⊕ Jika $a < b$, maka $a + c > b + c$,

⊕ Jika $a < b$, maka $a - c > b - c$,

2. Perkalian/Pembagian dengan bilangan positif

Jika a, b, dan $c \in \mathbb{R}$ dengan $c > 0$ (c positif), selalu berlaku:

⊕ Jika $a > b$, maka $ac > bc$,

⊕ Jika $a > b$, maka $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$,

⊕ Jika $a < b$, maka $ac > bc$,

⊕ Jika $a < b$, maka $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

3. Perkalian/Pembagian dengan bilangan negatif

Jika a, b, dan $c \in \mathbb{R}$ dengan $c < 0$ (c negatif), selalu berlaku:

⊕ Jika $a > b$, maka $ac < bc$,

⊕ Jika $a > b$, maka $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

⊕ Jika $a < b$, maka $ac > bc$,

⊕ Jika $a < b$, maka $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$,

4. Transitif

Jika a, b, dan $c \in \mathbb{R}$ dengan $c > 0$ (c positif), selalu berlaku:

⊕ Jika $a > b$, dan $b > c$, maka $a > c$,

⊕ Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$,

5. Perpangkatan Pertidaksamaan

Jika $a > b > k$ dengan $k \geq 0$, maka:

⊕ $a^n > b^n > k^n$ untuk $n \in$ bilangan asli

Jika $a < b < k$ dengan $k < 0$, maka:

⊕ $a^n > b^n > k^n$ untuk $n \in$ bilangan genap positif

⊕ $a^n < b^n < k^n$ untuk $n \in$ bilangan ganjil positif

6. Sifat-sifat penting lainnya dalam pertidaksamaan

⊕ Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$,

⊕ Jika $a > 0$ dan $b > 0$ atau $a < 0$ dan $b < 0$, maka $ab > 0$,

⊕ Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$,

⊕ Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$,

⊕ Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$,

⊕ Jika $a < 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$,

⊕ Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\frac{a}{b} > 0$,

⊕ Jika $0 < a < b$ atau $a < b < 0$, maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,

⊕ Jika $a > 0$ dan $b > 0$ serta $a^2 > b^2$, maka $a > b$,

C. PERTIDAKSAMAAN YANG MENGANDUNG NILAI MUTLAK

⊕ $|a| \le b$ ekuivalen dengan $-b \le a \le b$ (b tidak negatif)

⊕ $|a| \ge |b|$ ekuivalen dengan $a^2 \le b^2$

⊕ $|a| \ge b$ ekuivalen dengan $a \le -b$ atau $a \ge b$,

D. PERTAKSAMAAN AM-GM

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, maka:

Rataan Aritmatik/*Aritmethic Mean* (*AM*) = $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$

Rataan Geometri/*Geometric Mean* (*GM*) = $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n}$

Hubungan antara *AM* dan *GM* adalah $AM \ge GM$.

Contoh soal:

Untuk *a*, *b*, dan *c* bilangan real non-negatif, buktikan bahwa

$$(a + b)(b + c)(c + a) \ge 8abc$$

Jawab:

Berdasarkan ketaksamaan $AM \ge GM$, maka

$\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \qquad \rightarrow \qquad a + b \ge 2\sqrt{ab}$

Dengan cara yang sama, diperoleh $a + c \ge 2\sqrt{ac}$ dan $b + c \ge 2\sqrt{bc}$

Dengan mengalikan ketiga pertidaksamaan, maka

$(a+b)(a+c)(b+c) \ge 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc}$

$(a + b)(b + c)(c + a) \ge 8abc$ (terbukti)

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x-4<6-\frac{2}{3}x<\frac{3}{4}x+6$ adalah …

   Jawab:

   $2x-4<6-\frac{2}{3}x$

   $6x-12<18-2x$

   $8x<30$

   $x<3\frac{3}{4}$ ……… (1)

   $6-\frac{2}{3}x<\frac{3}{4}x+6$

   $72-8x<9x+72$

   $-17x<0$

   $x>0$ ……… (2)

   dari (1) dan (2) diperoleh $0<x<3\frac{3}{4}$

   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{x \middle| 0<x<3\frac{3}{4}\right\}$

2. Dua kali banyak bola dalam kantong A kurang sedikit dari banyak bola dalam kantong B. Jumlah banyak bola dalam kantong A dan C adalah kurang sedikit dari banyak bola dalam kantong B. Ada lebih banyak bola dalam kantong D daripada dalam kantong B. Ada 6 bola dalam kantong C dan 9 bola dalam kantong D. Berapa isi bola dalam kantong B?

   Jawab:

   Berdasarkan keterangan soal, diperoleh

   $2A<B$ ……… (1)

$A + C < B$ ……. (2)

$D > B$ ………… (3)

$C = 6$ ………… (4)

$D = 9$ ………… (5)

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh $B - A > 6$

Dari persamaan (3) dan (5) diperoleh $B < 9$

Dari persamaan (6) dan (7) diperoleh $A + 6 < 9$ atau $A < 3$

Jika $A = 2$, maka $8 < B < 9$ (tidak mungkin)

Jadi, $A = 1$, maka $7 < B < 9$, sehingga $B = 8$.

3. Diketahui bahwa himpunan penyelesaian pada x dalam pertidaksamaan $\frac{2m+x}{3} \le \frac{4mx-1}{2}$ adalah $x \ge \frac{3}{4}$, carilah besar nilai m.

Jawab:

$$\frac{2m+x}{3} \le \frac{4mx-1}{2}$$

$$4m + 2x \le 12mx - 3$$

$$2(6m - 1)x \ge 4m + 3$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $x \ge \frac{3}{4}$ yang berakibat $6m - 1 > 0$ dan

$$\frac{4m+3}{2(6m-1)} = \frac{3}{4},$$

$$2(4m + 3) = 3(6m - 1)$$

$$(18 - 8)m = 6 + 3$$

$$m = \frac{9}{10}$$

Jadi, $m = \frac{9}{10}$.

4. Tanpa menggunakan alat hitung, tunjukkan bahwa $6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$.

   Jawab:

   Anggap bahwa $6-\sqrt{35}\geq\frac{1}{10}$, maka $6-\frac{1}{10}\geq\sqrt{35}$ atau $59\geq 10\sqrt{35}$.

   Kuadratkan kedua ruas, diperoleh $3481 \geq 3500$, jelas bahwa ini tidak benar.

   Sehingga $6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$.

5. Solve the inequality $|3x^2-2|<1-4x$

   Solution:

   $|3x^2-2|<1-4x$,

   $4x-1<3x^2-2<1-4x$,

   $0<3x^2-4x-1$ and $|3x^2+4x-3<0$

   $x<\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ or $x>\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ and $\frac{-2-\sqrt{13}}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$

   Since $\frac{-2-\sqrt{13}}{3}<\frac{2-\sqrt{7}}{3}<\frac{-2+\sqrt{13}}{3}<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$, the solution set is

   $\frac{-2-\sqrt{13}}{3}<x<\frac{2-\sqrt{7}}{3}$

6. Selesaikanlah pertaksamaan $|x^2-x|>2$

   Jawab:

   Karena $|x^2-x|>2$, maka $x^2-x<-2$ atau $x^2-x>2$

   $x^2-x<-2 \quad\rightarrow\quad x^2-x+2<0$

   $x^2-x>2 \quad\rightarrow\quad x^2-x-2>0$

   Pertidaksamaan $x^2-x+2<0$ tidak memiliki solusi real karena diskriminan Δ dari persamaan $x^2-x+2=0$ adalah negatif.

   $\Delta=(-1)^2-8=-7<0$

Jadi, kurva $y = x^2 - x + 2$ terletak di atas sumbu x. Dengan demikian,

$x^2 - x - 2 > 0$

$(x - 2)(x + 1) > 0$

$x < -1$ atau $x > 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $(-\infty, -1)$ atau $(2, +\infty)$

7. Diketahui a, b, dan c bilangan real positif dan $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa $ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}$.

Jawab:

$(a - b)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$ …… (1)

$(a - c)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^2 + c^2 \geq 2ac$ ……. (2)

$(b - c)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad b^2 + c^2 \geq 2bc$ ……. (3)

Jumlahkan ketiga persamaan, diperoleh

$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$

$(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2ac - 2bc \geq ab + ac + bc,$

$(1)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$

$ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}$ (terbukti)

UJI KESIAPAN 1.5

1. Keliling sebuah segitiga yang panjang sisinya $(x + 1)$, $(x + 2)$, dan $(x + 3)$ lebih besar dari keliling persegi dengan panjang sisinya $(x - 12)$. Jika x adalah bilangan bulat, tentukan luas maksimum dari persegi tersebut.

2. Beni ingin membeli paling sedikit 5 pulpen dan banyaknya tidak lebih dari 12 kali banyak pensil. Beni hanya mempunyai uang Rp 30.000,00. Sedangkan harga 1 pulpen adalah Rp 2.000,00 dan harga 1 pensil adalah Rp 1.000,00. Berapa selisih maksimum banyak pulpen dan pensil yang dibeli Beni?

3. Jika $f(x) = 2x + 5$ dan $-1 < f(x) - f(2) < 1$, maka $-a < x - 2 < a$. Nilai terkecil a adalah …

4. Buktikanlah:

   a. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$,

   b. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$,

   c. Jika $0 < a < b$, maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

5. Harga sebuah *amplifier* untuk seorang pengecer adalah \$340. Dalam harga berapa amplifier tersebut harus dijual jika pengecer itu ingin meraup laba (untung) setidaknya 20% dari biaya pembelian?

6. Tunjukkan bahwa jika $x > y$, maka $xy < x^2 + y^2$.

7. Diketahui $2(x - 2) - 3(4x - 1) = 9(1 - x)$ dan $y < x + 9$, bandingkanlah antara $\frac{y}{\pi}$ dan $\frac{10}{31}y$.

8. Selesaikanlah pertidaksamaan $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1$.

9. Selesaikanlah pertidaksamaan $2|x| - |x - 2| \geq 0$

BARISAN dan DERET
(SQUENCE and SERIES)

A. BARISAN BILANGAN

Susunan bilangan yang dibentuk menurut pola atau aturan tertentu.

Pada barisan: 1, 3, 5, 7, 9, …

1 $\rightarrow$ U_1 (suku pertama)

3 $\rightarrow$ U_2 (suku kedua)

5 $\rightarrow$ U_3 (suku ketiga)

7 $\rightarrow$ U_4 (suku keempat)

$\vdots$

n $\rightarrow$ U_n (suku ke- n)

Contoh soal:

Tentukan tiga suku pertama jika suku umumnya dirumuskan sebagai $U_n = 3n^2 - 2$.

Jawab:

Untuk $n = 1 \rightarrow U_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1$

$n = 2 \rightarrow U_1 = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10$

$n = 3 \rightarrow U_1 = 3 \cdot 3^2 - 2 = 25$

Jadi, tiga suku pertama barisan tersebut adalah 1, 10, 25.

B. BARISAN ARITMETIKA

Barisan dengan dua suku berurutan yang selalu mempunyai beda yang tetap (konstan).

Perhatikan barisan 1, 3, 5, 7, …

$U_2 = U_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$U_3 = U_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

$U_4 = U_3 + 2 = 5 + 2 = 7$, dan seterusnya

Perhatikan bahwa, suku berikutnya selalu diperoleh dengan menambahkan bilangan konstan (yaitu 2) pada suku sebelumnya. Bilangan tetap (konstan) itu disebut beda barisan dan dinotasikan dengan *b*.

Menentukan beda/selisih pada barisan aritmetika:

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$$

Rumus suku ke- *n*:

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

C. BARISAN GEOMETRI

Barisan dengan dua suku berurutan yang selalu mempunyai rasio yang tetap (konstan).

Perhatikan barisan 1, 2, 4, 8, …

$U_2 = U_1 \times 2 = 1 \times 2 = 2$

$U_3 = U_2 \times 2 = 2 \times 2 = 4$, dan seterusnya

Perhatikan bahwa, suku berikutnya selalu diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya dengan bilangan konstan (yaitu 2). Bilangan tetap (konstan) itu disebut rasio barisan dan dinotasikan dengan ***r***.

Menentukan rasio pada barisan geometri:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Rumus suku ke- *n*:

$$U_n = U_1 \cdot r^{n-1}$$

D. DERET

Penjumlahan berurut suku-suku dari suatu barisan

a. $2+5+8+11+14+\ldots$

b. $5+10+15+20+25+\ldots$

c. $1+5+25+125+625+3125+\ldots$

d. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

e. $U_1+U_2+U_3+U_4+\ldots+U_n$

E. DERET ARITMETIKA

Jika $U_1, U_2, U_3\ldots$ barisan aritmetika, maka $U_1+U_2+U_3+\ldots$ merupakan deret aritmetika. Jumlah n suku pertama barisan aritmetika adalah:

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)b\right]$$

di mana:

a = suku pertama

b = beda/selisih

n = nomor suku (suku ke- ...)

Contoh soal:

Diberikan deret aritmetika 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + …. Tentukan jumlah 15 suku pertama dan jumlah 2016 suku pertama.

Jawab:

Deret aritmetika: $1+5+9+13+17+21+\ldots$

$a=1$ → suku pertama

$b=4$ → beda/selisih

Dengan menggunakan rumus di atas diperoleh:

Untuk $n=5$ → $S_5=\frac{15}{2}\left[2\cdot 1+(15-1)\cdot 4\right]=435$

Untuk $n = 100$ → $S_{2016} = \frac{2016}{2}\left[2 \cdot 1 + (2016-1) \cdot 4\right] = 8.126.496.$

Jadi, jumlah 15 suku pertama dan jumlah 2016 suku pertama berturut-turut adalah 435 dan 8.126.496.

F. DERET GEOMETRI

Jika $U_1, U_2, U_3 \ldots$ barisan aritmetika, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$ merupakan deret geometri. Jumlah n suku pertama barisan geometri adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1 \text{ (untuk } r < 1)$$

atau

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1 \text{ (untuk } r > 1)$$

di mana:

a = suku pertama

r = rasio/pembanding

n = nomor suku (suku ke- ...)

Contoh soal:

Tentukan jumlah 7 suku pertama dari deret geometri 2 + 4 + 8 + 16 + …..

Jawab:

Deret geometri: $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

$a = 2$ → suku pertama

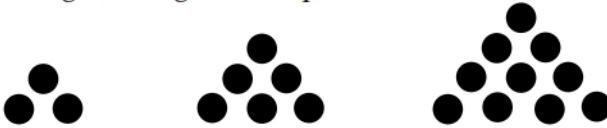
$r = 2$ → rasio ($r > 1$)

Dengan menggunakan rumus di atas (untuk $r > 1$) diperoleh:

Untuk $n = 7$ → $S_7 = \frac{2 \cdot (2^7 - 1)}{2-1} = \frac{2 \cdot (128-1)}{1} = 2 \cdot 127 = 254$

Jadi, jumlah 7 suku pertama adalah 254

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Tentukan banyak lingkaran pada pola ke- 10, 100, n pada pola berikut untuk sebarang n bilangan bulat positif.

Jawab:

3, 6, 10, … (disebut juga pola bilangan segitiga)

(1 + 2), (1 + 2 + 3), (1 + 2 + 3 + 4), …

Perhatikan bahwa:

$l_1: \quad \rightarrow \quad 1$

$l_2: \quad \rightarrow \quad 1+2$

$l_3: \quad \rightarrow \quad 1+2+3$

$l_4: \quad \rightarrow \quad 1+2+3+4$

Diketahui deret bilangan di atas merupakan deret aritmetika dengan:

a (suku pertama) = 1

b (beda/selisih) = 1

dengan rumus jumlah sampai suku ke-n:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot\left(2a+\left(n-1\right)b\right)$$

$$S_{10} = \frac{n}{2}\cdot\left(2\cdot 1+\left(n-1\right)\cdot 1\right)$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left(2+n-1\right) = \frac{n}{2}\cdot\left(n+1\right) = \frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

Dengan demikian:

Banyak lingkaran pada pola ke- 10:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

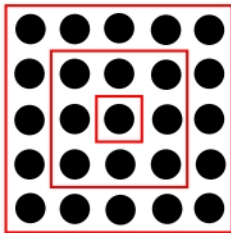
$$S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 5 \times 11 = 55.$$

Banyak lingkaran pada pola ke- 100:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

Banyak lingkaran pada pola ke- n dapat ditemukan dengan $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Dengan memperhatikan bola-bola yang dibatasi garis merah, tentukan:

Perhatikan bahwa:

Pola ke- 1: 1

Pola ke- 2: $8 = 9 - 1 \quad \rightarrow \quad 8 \cdot (2 - 1)$

Pola ke- 3: $16 = 25 - 9 \quad \rightarrow \quad 8 \cdot (3 - 1)$

Pola ke- 4: $24 = 49 - 25 \quad \rightarrow \quad 8 \cdot (4 - 1)$

$\vdots$

Pola ke- n: $(2n - 1)^2 - (2n - 3)^2 \quad \rightarrow \quad 8 \cdot (n - 1)$

Dengan demikian:

a. Banyak bola pada pola ke- 100

Jawab:

$$\begin{aligned}(2 \cdot 100 - 1)^2 - (2 \cdot 100 - 3)^2 &= (200 - 1)^2 - (200 - 3)^2 \\ &= 199^2 - 197^2 \\ &= (199 + 197) \cdot (199 - 197) \\ &= 396 \cdot 2 = 792\end{aligned}$$

b. Jumlah bola hingga pola ke- 100

Jawab:

$$S_n = (2n - 1)^2$$

$$\begin{aligned}S_{100} &= (2 \cdot 100 - 1)^2 \\ &= (200 - 1)^2 \\ &= (199)^2 \\ &= 39.601\end{aligned}$$

Jadi, umlah bola hingga pola ke- 100 adalah 39.601.

3. Masing-masing segitiga berikut terbentuk dari 3 stik. Dengan memperhatikan pola berikut, tentukan banyak stik pada pola ke- 10, 100, dan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif.

Jawab:

Pola ke- 1 = 3 → $2 \cdot 1 + 1$

Pola ke- 2 = 5 → $2 \cdot 2 + 1$

Pola ke- 3 = 7 → $2 \cdot 3 + 1$

Pola ke- 4 = 9 → $2 \cdot 4 + 1$

⋮

Pola ke- n: $\rightarrow$ $2n + 1$

Banyak stik pada pola ke- 10: $2 \cdot 10 + 1 = 21$

Banyak stik pada pola ke- 100: $2 \cdot 100 + 1 = 201$

Banyak stik pada pola ke-n: $2n + 1$

Dengan memperhatikan pola berikut, tentukan:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + (pola\ ke\text{-}\ n)$$

a. Tiga pola berikutnya

Jawab:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \ldots$$

b. Pola bilangan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif

Jawab:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

c. Jumlah bilangan ke- n untuk sebarang n bilangan bulat positif

Jawab:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

4. Tentukan nilai $p = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

Jawab:

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$$

$$3p = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\right)}_{p}$$

$3p = 1 + p \;\rightarrow\; 2p = 1$

$p = \frac{1}{2} = 0{,}5 \;\rightarrow\;$ dibaca "p mendekati 0,5"

Soal di atas juga dapat diselesaiakan dengan rumus $\frac{a}{1-r}$ (jumlah suku ke-n untuk deret geometri tak hingga).

5. Tentukan nilai $y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003$!

Jawab:

$y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003$

$y = \underbrace{(x + x + x + \ldots + x)}_{n\,=\,100} + 13 + 23 + 33 + \ldots + 1.003$

$y = 100x + (10 + 3 + 20 + 3 + 30 + 3 + \ldots + 1.000 + 3)$

$y = 100x + (10 + 20 + 30 + \ldots + 1.000 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3)$

$y = 100x + (10 + 20 + 30 + \ldots + 1.000) + (3 + 3 + 3 + \ldots + 3)$

$y = 100x + 10 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \ldots + 3)}_{n\,=\,100}$

$y = 100x + 10 \cdot 5.050 + 300 = 100x + 50.500 + 300 = 100x + 50.800$

Jadi, $y = x + 13 + x + 23 + x + 33 + \ldots + x + 1.003 = 100x + 50.800$.

6. (*OSK SMP/MTs 2003*) Perhatikan gambar berikut.

• •
• •

• ◊ •
◊ • ◊
• ◊ •

• ◊ ◊ •
◊ • • ◊
◊ • • ◊
• ◊ ◊ •

• ◊ ◊ ◊ •
◊ • • • ◊
◊ • • • ◊
◊ • • • ◊
• ◊ ◊ ◊ •

Banyaknya bulatan hitam pada gambar kesepuluh nantinya adalah …

Jawab:

Gambar I : 4 bulatan hitam

Gambar II : 5 bulatan hitam

Gambar III : 8 bulatan hitam

Gambar IV : 13 bulatan hitam

Perhatikan polanya:

Ke- 1 → $4 = 4 + 0 = 4 + (1 - 1)^2$

Ke- 2 → $5 = 4 + 1 = 4 + (2 - 1)^2$

Ke- 3 → $8 = 4 + 4 = 4 + (3 - 1)^2$

Ke- 4 → $13 = 4 + 9 = 4 + (4 - 1)^2$

…

Ke- n → $4 + (n - 1)^2$

maka untuk $n = 10$ dengan pola jumlah bulatan hitam ke- $n = 4 + (n - 1)^2$.

$4 + (10 - 1)^2$

$4 + 81 = 85$

Jadi, banyaknya bulatan hitam pada gambar kesepuluh nantinya adalah 85.

7. (*OSK SMP/MTs 2011*) Nilai jumlahan bilangan berikut adalah …

   $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots - 2010^2 + 2011^2$

   Jawab:

   $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots - 2010^2 + 2011^2$

   $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \ldots - 2010^2 + 2011^2$

   $-3 \quad -7 \quad -11 \quad - \ldots - 2010^2 + 2011^2$

   $a = -3$

   $b = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$

   Merupakan deret aritmatika dengan suku pertama = –3 dan beda = –4

$$n = \frac{2010}{2} = 1005$$

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot\left(2a+\left(n-1\right)b\right)$$

$$= \frac{1005}{2}\cdot\left(2\cdot\left(-3\right)+\left(1005-1\right)\left(-4\right)\right)$$

$$= \frac{1005}{2}\cdot\left(-6+1004\cdot\left(-4\right)\right)$$

$$= \frac{1005}{2}\cdot\left(-6-4016\right)$$

$$= \frac{1005}{2}\cdot\left(-4022\right) = -1005\cdot 2011$$

Sehingga:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots - x_1 = 2010^2 + 2011^2 = -1005\cdot 2011 + 2011\cdot 2011$$

$$= 2011\cdot(2011 - 1005)$$

$$= 2011 \times 1006$$

$$= 2023066$$

Jadi, nilai dari: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots - 2010^2 + 2011^2 = 2023066$

8. Suku ke- 6 sebuah deret aritmetika adalah 24.000 dan suku ke- 10 adalah 18.000. Agar suku ke- $n = 0$, maka nilai n yang memenuhi adalah …

Jawab:

$U_6 = 24.000$ dan $U_{10} = 18.000$

$$U_6 \quad\rightarrow\quad a + 5b = 24.000$$

$$U_{10} \quad\rightarrow\quad a + 9b = 18.000 \; -$$

$$-4b = 6.000$$

$$b = -1.500$$

Substitusikan $b = -1.500$ ke $a + 5b = 24.000$:

$$a + 5b = 24.000$$
$$a + 5(-1.500) = 24.000$$
$$a - 7.500 = 24.000$$
$$a = 31.500$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$0 = 31.500 + (n - 1) \cdot (-1.500)$$

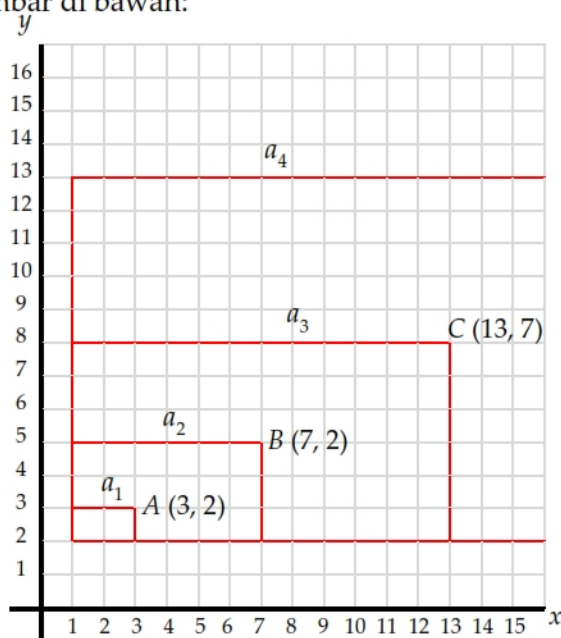
$$0 = 31.500 - 1.500n + 1.500$$

$$1.500n = 33.000$$

$$n = \frac{33.000}{1.500}$$

$$n = 22$$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 22.

9. Perhatikan gambar di bawah:

Diketahui persegi a_1 dengan titik koordinat bagian ujungnya adalah $A(3, 2)$

Persegi a_2 dengan titik koordinat bagian ujungnya adalah $B(7, 4)$

Persegi a_3 dengan titik koordinat bagian ujungnya adalah $C(13, 7)$

Persegi a_4 dengan titik koordinat bagian ujungnya adalah $D(21, 12)$

$\vdots$

Persegi a_{20} dengan titik koordinat bagian ujungnya adalah $T(x, y)$. Tentukan koordinat titik T pada persegi a_{20}.

Jawab:

Persegi a_1 → $A\ (3, 2)$

Persegi a_2 → $B\ (7, 4)$

Persegi a_3 → $C\ (13, 7)$

Persegi a_4 → $D\ (21, 12)$

$\vdots$

Persegi a_{20} → $T(x\ , y)$

Perhatikan nilai absisnya

3, 7, 13, 21, …

$(1 \cdot 2 + 1), (2 \cdot 3 + 1), (3 \cdot 4 + 1), (4 \cdot 5 + 1), \ldots$

Dapat dilihat bahwa polanya adalah $(n \cdot (n + 1) + 1)$ atau $n^2 + n + 1$.

Sehingga nilai absis pada $a_{20} = 20 \cdot (20 + 1) + 1 = 20 \cdot 21 + 1 = 421$ (titik x)

Sekarang amati nilai ordinatnya.

2, 4, 7, 12, …

Titik ordinat ke-n dapat dicari dengan rumus $\frac{1}{6} \cdot \left(n^3 - 3n^2 + 14n\right)$

Sehingga nilai ordinat pada a_{20} :

$$\frac{1}{6}\cdot\left(20^3-3\cdot 20^2+14\cdot 20\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(8000-1200+280\right)=\frac{1}{6}\cdot 7080=1180 \text{ (titik } y\text{)}$$

Jadi, koordinat titik T pada persegi a_{20} adalah T (421, 1180).

10. Diberikan kondisi sebagai berikut:

$$1+2=3$$

$$4+5+6=7+8$$

$$9+10+11+12=13+14+15$$

$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

$$25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$$

$$36+37+38+39+40+41+42=43+44+45+46+47+48$$

Apakah bentuk tersebut memiliki pola? Jelaskan?

Jawab:

Misalkan kita ambil bentuk ketiga:

$$9+10+11+12=13+14+15$$

Jika kita tambahkan 4 pada tiga angka pertama pada ruas kiri (9, 10, and 11) maka kita peroleh tiga bilangan pertama di ruas kanan (13, 14, and 15).

Untuk bentuk ke-n (dengan $n \geq 1$) yaitu

$$n^2+\left(n^2+1\right)+\cdots+\left(n^2+n\right)=\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+2\right)+\cdots+\left(n^2+n+n\right)$$

Terdapat bentuk $n+1$ pada ruas kiri dan bentuk n pada ruas kanan. Jika ditambahkan $n+1$ pada setiap bentuk di ruas kiri kecuali bentuk terakhir, maka didapat semua bentuk pada ruas kanan. Dengan demikian, bentuk terakhir pada ruas kiri adalah $n^2+n=(n+1)n$.

UJI KESIAPAN 1.6

1. Diketahui pola barisan bilangan $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\ldots,\frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut.

2. Diketahui deret aritmetika tingkat satu dengan S_n adalah jumlah n suku pertama. Jika $S_n=\left(m^3-1\right)n^2-\left(m^2+2\right)n+m-3$, maka tentukanlah suku ke-10 pada barisan tersebut!

3. Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke- 7 dan suku ke- 10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukanlah jumlah 20 suku pertama?

4. Bila a, b, c merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc},\frac{1}{ca},\frac{1}{ab}$.

5. Tentukanlah nilai x dari penjumlahan suku-suku barisan geometri $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^x = 2046$.

6. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut.

7. Pertumbuhan ekonomi biasanya dalam persen. Misalnya, pertumbuhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami pertumbuhan sebesar 6,5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.

STATISTIKA

(*STATISTICS*)

A. UKURAN PEMUSATAN DATA TUNGGAL

Statistik adalah suatu ilmu yang mempelajari tentang cara mengumpulkan, mengolah, menjelaskan, meringkas, menyajikan, dan menginterpretasi data yang digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan.

a. Rerata/Rataan hitung (*Arithmetic Mean*)

Untuk data tunggal

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Metode Singkat:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

di mana:

A = rataan sementara atau sebarang nilai x

d = selisih tiap nilai dengan rataan sementara

Contoh soal:

Diberikan nilai data tinggi badan dari 8 siswa SMP Tunasbangsa yaitu 155, 150, 152, 152, 157, 161, 154, 156. Hitunglah rata-rata tinggi mereka.

Jawab:

Dengan cara biasa:

$$\bar{x} = \frac{155 + 150 + 152 + 152 + 157 + 161 + 154 + 156}{8} = \frac{1237}{8} = 154{,}625$$

Dengan metode singkat:

Anggap 150 adalah rataan sementara.

Selisih tiap nilai dengan rataan sementara:

155 – 150 = 5

150 – 150 = 0

152 – 150 = 2, dan seterusnya

Sehingga diperoleh:

$$\bar{x} = 150 + \frac{5+0+2+2+7+11+4+6}{8} = 150 + \frac{37}{8} = 150 + 4{,}625 = 154{,}625$$

b. Nilai tengah (*Median*)

$$Md = \textit{data ke-}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \text{untuk data ganjil}$$

$$Md = \frac{\textit{data ke-}\left(\frac{n}{2}\right) + \textit{data ke-}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} \quad \rightarrow \quad \text{untuk data genap}$$

*untuk menentukan median, kamu harus mengurutkan data terlebih dahulu.

Contoh soal:

Misalkan ada bilangan 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 (banyak data ganjil), maka nilai tengahnya adalah 40.

Andaikan banyak data genap misal 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85. Oleh karena tidak ada data yang berada tepat di tengah, maka kita tentukan dengan menjumlah data keempat dan kelima kemudian dibagi dua, yaitu:

$$\frac{45+55}{2} = 50$$

Jadi, nilai tengah dari data 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 adalah 50.

c. Modus (*Mode*)

Modus menunjukkan nilai dalam sebaran data yang paling sering muncul.

Contoh soal:

Diketahui data nilai ulangan matematika yaitu 7, 5, 8, 8, 6, 7, 8, 5, 9, 9, 6, 8, 7, 7, 9, 6, 9, 5, 8, 6, 7, 8, 10. Tentukan modus dari dari tersebut.

Jawab:

5	→	ada 2	8	→	ada 6
6	→	ada 4	9	→	ada 4
7	→	ada 5	10	→	ada 1

Karena nilai 8 yang paling banyak muncul, maka modusnya adalah 8.

B. UKURAN PENYEBARAN DATA TUNGGAL

a. Kuartil

Kuartil bawah berada di $\frac{1}{4}(n+1)$

Kuartil tengah (median) berada di $\frac{1}{2}(n+1)$

Kuartil Atas berada di $\frac{3}{4}(n+1)$

b. Desil (persepuluh)

Letak D_i ditentukan oleh $D_i = \frac{i}{10}(n+1)$

c. Persentil (perseratus)

Letak P_i ditentukan oleh $P_i = \frac{i}{100}(n+1)$

d. Hamparan (jangkauan)

Jangkauan (*J*) adalah selisih antara data terbesar dengan data terkecil

$J = D_{\max} - D_{\min}$

Jangkauan interkuartil (J_i) adalah selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah

$J_i = Q_3 - Q_1$

Setengah dari jangkauan interkuartil disebut simpangan kuartil

Contoh soal:

Diberikan data dengan ukuran 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9. Tentukanlah:

(i) Kuartil atas dari data tersebut

(ii) Desil ke- 4 dari data tersebut

(iii) Persentil ke- 40 dari data tersebut

(iv) Jangkauan interkuatil dari data tersebut

Jawab:

(i) Letak $Q_3 = \frac{3}{4}(n+1) = \frac{3}{4}(8+1) = \frac{27}{4} = 6{,}75$

$$Q_3 = \frac{D_6 + D_7}{2} = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Jadi, kuartil atas dari data tersebut adalah 7,5.

(ii) Letak $D_4 = \frac{4}{10}(n+1) = \frac{4}{10}(8+1) = \frac{36}{10} = 3{,}6$

$$D_4 = D_3 + 0{,}6(D_4 - D_3) = 5 + 0{,}6\ (5 - 5) = 5$$

Jadi, desil ke- 4 dari data tersebut adalah 5.

(iii) Letak $P_{40} = \frac{40}{100}(n+1) = \frac{4}{10}(8+1) = \frac{36}{10} = 3{,}6$

$$P_{40} = D_3 + 0{,}6(D_4 - D_3) = 5 + 0{,}6\ (5 - 5) = 5$$

Jadi, persentil ke- 40 dari data tersebut adalah 5.

(iv) Letak $Q_1 = \frac{1}{4}(n+1) = \frac{1}{4}(8+1) = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$$Q_1 = \frac{D_2 + D_3}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$J_i = Q_3 - Q_1 = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$$

Jadi, jangkauan interkuatil dari data tersebut adalah 3.

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Perhatikan tabel beikut. Sebagai hasil RUPS suatu perusahaan, memutuskan kenaikan gaji dengan aturan sebagai berikut. Gaji buruh kurang atau samdengan Rp 2.000.000,00 diberi kenaikan gaji sebesar 12% dan gaji buruh lebih dari Rp 2.000.000,00 mendapat 8% kenaikan gaji. Berapakah rata-rata gaji buruh setelah mengalami kenaikan gaji?

Nama Karyawan	Besar gaji (dalam ratus ribu rupiah)
A	25
B	18
C	22
D	20
E	17
F	19
G	22
H	22,5

Jawab:

Nama Karyawan	Besar gaji (dalam ratus ribu rupiah)	Gaji sebenarnya
A	25	2.500.000
B	18	1.800.000
C	22	2.200.000
D	20	2.000.000
E	17	1.700.000
F	19	1.900.000
G	22	2.200.000
H	22,5	2.250.000

Untuk menghitung rataan gaji karyawan tersebut, marilah kita bagi menjadi 2 grup yaitu rataan gaji karyawan yang kurang atau samadengan Rp 2.000.000,00 dan rataan gaji karyawan yang lebih dari Rp 2.000.000,00. Sehingga:

Rataan gaji ≤ Rp 2.000.000,00

$$\frac{1.800.000 + 1.700.000 + 1.900.000}{3} = \frac{5.400.000}{3} = 1.800.000$$

Rataan gaji ≤ Rp 2.000.000,00 setelah mengalami kenaikan 12%

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times 100\% + 1.800.000 \times 12\%$

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times (100\% + 12\%)$

$\Leftrightarrow 1.800.000 \times 112\% = 1.800.000 \times \frac{112}{100} = 18.000 \times 112 = 2.016.000$

Rataan gaji > Rp 2.000.000,00

$\Leftrightarrow \frac{2.500.000 + 2 \times 2.200.000 + 2.000.000 + 2.250.000}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{11.150.000}{5} = 2.230.000$

Rataan gaji > Rp 2.000.000,00 setelah mengalami kenaikan 8%

$\Leftrightarrow 2.230.000 \times 108\% = 2.230.000 \times \frac{108}{100} = 22.300 \times 108 = 2.408.400$

Sehingga, rataan gaji seluruh karyawan setelah mengalami kenaikan gaji adalah:

$$\frac{2.016.000 + 2.408.400}{2} = \frac{4.424.400}{2} = 2.212.200$$

Jadi, rata-rata setelah mengalami kenaikan gaji adalah Rp 2.212.200.

2. Nilai ujian mata pelajaran diberikan dalam tabel berikut.

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian siswa tersebut di atas rata-rata. Tentukanlah.

a. Persentase siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.

b. Modus dan median data di atas.

Jawab:

Nilai	3	6	7	8	9	Jumlah
Frekuensi	3	5	4	6	2	20
Nilai × Frekuensi	9	30	28	48	18	133

Banyak data = 20

Jumlah semua nilai data = 133

Sehingga:

$$\bar{x} = \frac{133}{20} = 6,65$$

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian di atas 6,65 (Nilai > 6,65)

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2

Dapat dilihat bahwa siswa yang dapat dinyatakan lulus ujian ada sebanyak 12 siswa.

a. Persentase siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.

$$\frac{12}{20} \times 100\% = 12 \times 5\% = 60\%$$

Prosentase siswa yang lulus ujian adalah 60%.

Prosentase siswa yang tidak lulus ujian adalah 100% – 60% = 40%

b. Modus dan median data di atas.

- Modus data di atas adalah 8. Mengapa?
- Median data di atas adalah:

$$Me = \frac{data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}\right) + data\ ke\text{-}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{data\ ke\text{-}\left(\frac{20}{2}\right) + data\ ke\text{-}\left(\frac{20}{2}+1\right)}{2}$$

$$= \frac{data\ ke\text{-}\ 10 + data\ ke\text{-}\ 11}{2}$$

$$= \frac{7+7}{2} = 7 \quad \rightarrow \quad \text{mediannya adalah 7}$$

Perhatikan tabel berikut. Data pada tabel sudah terurut.

Nilai	3	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	4	6	2
Frekuensi komulatif	3	8	12	18	20
Data ke-	1 – 3	4 – 8	9 – 12	13 – 18	19 – 20

3. Diketahui data dengan pola sebagai berikut.

   $(x + 2)$, $(2x - 1)$, x, $3x$, $5x$ memiliki rata-rata 7. Tentukanlah nilai x, modus, dan median data tersebut!

   Jawab:

   $(x + 2), (2x - 1), x, 3x, 5x \quad \rightarrow \quad$ ada sebanyak 5 data

   $$\frac{(x+2)+(2x-1)+x+3x+5x}{5} = 7$$

   $(x + 2) + (2x - 1) + x + 3x + 5x = 35$

   $x + 2 + 2x - 1 + x + 3x + 5x = 35$

   $12x + 1 = 35$

   $12x = 35 - 1$

   $12x = 34$

   $$x = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$$

substitusi $x = \frac{17}{6}$ ke setiap nilai data.

$$x + 2 = \frac{17}{6} + 2 = \frac{17}{6} + \frac{12}{6} = \frac{29}{6}$$

$$2x - 1 = 2 \cdot \frac{17}{6} - 1 = \frac{34}{6} - \frac{6}{6} = \frac{28}{6}$$

$$x = \frac{17}{6}$$

$$3x = 3 \cdot \frac{17}{6} = \frac{51}{6}$$

$$3x = 5 \cdot \frac{17}{6} = \frac{85}{6}$$

$(x + 2)$, $(2x - 1)$, x, $3x$, $5x$ kita tulis kembali menjadi $\frac{29}{6}, \frac{28}{6}, \frac{17}{6}, \frac{51}{6}$, dan $\frac{85}{6}$.

- Tidak ada modus dalam data tersebut
- Median (urutkan data terlebih dahulu)

  $\frac{29}{6}, \frac{28}{6}, \frac{17}{6}, \frac{51}{6}, \frac{85}{6}$

  Karena banyak data ganjil maka mediannya yaitu $\frac{29}{6}$.

4. Misalkan data tertinggi suatu data disimbolkan x_{maks} dan data terendah suatu data disimbolkan x_{min}, diketahui bahwa $x_{maks} - x_{min} = 6$, dan rata-rata data tersebut adalah 16. Jika setiap nilai data dikali n kemudian ditambah $2m$, diperoleh data baru dengan $x_{maks} - x_{min} = 9$, dan rata-rata menjadi 30. Tentukanlah nilai $m + n$!

   Jawab:

   Misal data-datanya adalah:

   a, b, dan c dengan a, b, dan c merupakan bilangan asli.

   $a < b < c$

Sehingga:

$c - a = 6$

$\frac{a+b+c}{3} = 16 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 48$

Setiap nilai data dikali n kemudian ditambah $2m$ sehingga datanya menjadi

$(na + 2m), (nb + 2m), (nc + 2m) \quad \rightarrow \quad (na + 2m) < (nb + 2m) < (nc + 2m)$

Maka:

$(nc + 2m) - (na + 2m) = 9$

$nc + 2m - na - 2m = 9$

$nc - na = 9$

$n \cdot (c - a) = 9$

$n \cdot 6 = 9$

$6n = 9$

$n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\frac{(na+2m)+(nb+2m)+(nc+2m)}{3} = 30$

$(na + 2m) + (nb + 2m) + (nc + 2m) = 90$

$na + 2m + nb + 2m + nc + 2m = 90$

$na + nb + nc + 6m = 90$

$n \cdot (a + b + c) + 6m = 90$

$\frac{3}{2} \cdot (48) + 6m = 90$

$72 + 6m = 90$

$6m = 18$

$m = 3$

$m + n = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Jadi, $m + n = \frac{9}{2}$

5. Nilai rata-rata siswa wanita di suatu kelas adalah 65, sedangkan nilai rata-rata siswa pria adalah 72. Jika jumlah siswa di kelas itu 35 orang dan dan nilai rata-rata seluruh siswa 69, banyak siswa wanita adalah …

Jawab:

Misal a adalah jumlah nilai semua siswa wanita dan b adalah jumlah nilai semua siswa pria, maka:

$\bar{x}_a = 65$, $\bar{x}_b = 72$, dan $\bar{x}_{a+b} = 69$

$n_{a+b} = n_a + n_b \quad \rightarrow \quad n_b = 35 - n_a$

$\bar{x}_a = \frac{a}{n_a} \quad \rightarrow \quad a = 65n_a$

$\bar{x}_b = \frac{b}{n_b} \quad \rightarrow \quad b = 72n_b$

$\bar{x}_a$: rata-rata siswa wanita

$\bar{x}_b$: rata-rata siswa pria

$\bar{x}_{a+b}$: rata-rata seluruh siswa

n_a : banyak siswa wanita

n_b : banyak siswa pria

n_{a+b} : banyak seluruh siswa

Sehingga:

$\bar{x}_{a+b} = \frac{a+b}{n_{a+b}}$

$a + b = \left(\bar{x}_{a+b}\right)\left(n_{a+b}\right)$

$65n_a + 72n_b = 69 \times 35$

$65n_a + 72\left(35 - n_a\right) = 2415$

$65n_a + 2520 - 72n_a = 2415$

$7n_a = 105$

$n_a = 15$

Jadi, banyak siswa wanita adalah 15 orang.

UJI KESIAPAN 1.7

1. Diketahui enam orang siswa mendapatkan nilai ulangan tertinggi dengan jumlah nilainya adalah 564. Nilai setiap siswa tersebut adalah berbeda serta membentuk suatu barisan aritmetika. Jika rata-rata nilai keenam siswa tersebut sama dengan rata-rata delapan orang siswa yang nilainya membentuk barisan geometri. Temukan setiap nilai yang diperoleh keenam siswa tersebut?

2. Pendapatan rata-rata enam orang karyawan di suatu tempat usaha adalah Rp 2.850.000,- per bulan. Sebulan kemudian bertambah seorang pekerja sehingga pendapatan rata-rata sekarang menjadi Rp. 1.837.000,. Jika ada seorang lagi yang menjadi karyawan baru dan membuat pendapatan rata-rata menjadi Rp 2.775.000,-. Tentukan besar gaji yang diterima masing-masing pekerja baru tersebut?

3. Suatu hari Pak Hainur melakukan sebuah permainan di tempat bimbingan belajar, ia merahasiakan delapan bilangan. Jika seorang yang tercepat berhasil menemukan bilangan-bilangan itu, maka Pak Hainur akan memberikan hadiah sebuah buku olimpiade matematika. Ciri-ciri bilangan yang dimiliki Pak Hainur adalah sebagai berikut:

   - Bilangannya adalah bilangan asli berurutan,
   - Terdapat dua bilangan genap dan tiga bilangan ganjil,
   - Modusnya merupakan bilangan prima,
   - Jumlah dari semua bilangan tersebut merupakan kelipatan 11,
   - Ada satu bilangan yang habis membagi semua bilangan.

   Temukan semua bilangan yang mungkin dimiliki oleh Pak Hainur.

4. Diketahui rata-rata berat badan 12 pria adalah 54 kg dan berat rata-rata 8 orang wanita adalah 52 kg. Jika seorang pria dipertukarkan dengan seorang wanita dari kelompok tersebut, rata-rata berat badan dari kedua kelompok adalah sama, tentukan selisih berat badan pria dan wanita yang dipertukarkan …